



第九届“叶圣陶杯”国际青少年趣味数理科普知识大赛

省级初赛试题（高中组）

总分：100 分

一. 选择题（每题 5 分，共 50 分）

1. 高一年级某班 30 名同学参加体能测试，给出下列三个判断：

- ①有人通过了体能测试；
- ②同学甲没有通过体能测试；
- ③有人没有通过体能测试.

若这三个判断中只有一个是真，则下列选项中正确的是（ ）

- A. 30 名同学都通过了体能测试
- B. 30 名同学都没通过体能测试
- C. 只有 1 名同学通过了体能测试
- D. 只有 1 名同学没有通过体能测试

2. 已知集合 $A = \{0, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，则集合 $A \cup B =$ （ ）

- A. $\{0\}$
- B. $\{-1, 1\}$
- C. $\{-1, 0, 1, 2\}$
- D. $\{2\}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，则不等式

$f(x+1) > f(2x)$ 的解集为（ ）

- A. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$
- B. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
- C. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$
- D. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

4. 我国古代数学家僧一行应用“九服晷影算法”在《大衍历》中建立了晷影长 l 与太阳天顶距 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 的对应数表，这是世界数学史上较早的一张正切函数表. 根据三角学知识可知，晷影长度 l 等于表高 h 与太阳天顶距 θ 正切值的乘积，即 $l = h \tan \theta$. 对同一“表高”两次测量，第一次和第二次太阳天顶距分别为 α, β ，若第一次晷影长是“表高”的 3 倍，且 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ，则第二次的晷影长是“表高”的（ ）倍



A.3

B.2

C. $\frac{4}{3}$

D.1

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = f(x) - k$ ($0 < k \leq \frac{1}{2}$) 的零点个数为 ()

A.1 或 2

B.2

C.1 或 3

D.3

6. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ 交于 A 、 B 两点, 且 AB 平分圆 C_1 的周长, 则 $a+b$ 的值为 ()

A.0

B.2

C.4

D.6

7. 极光是由太阳发射的高速带电粒子受地磁场的影响, 进入两极附近时, 撞击并激发高空中的空气分子和原子引起的。假如我们在北极地区仰视, 发现正上方如图所示的沿顺时针方向运动弧状极光, 则关于这一现象中的高速粒子的说法正确的是 ()



A. 该粒子带负电

B. 该粒子轨迹半径逐渐增大

C. 若该粒子在赤道正上方垂直射向地面, 会向东偏转

D. 地磁场对垂直射向地球表面的该粒子的阻挡作用在南、北两极附近最强

8. 已知 $A(2, -1)$, $B(6, 1)$, 则在 y 轴上的截距是 -3 , 且经过线段 AB 的中点的直线方程为 ()

A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

B. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

D. $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$

9. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 且垂直于 x 轴的弦为 AB , O 为抛物线的顶点, 则 $\angle AOB$ 的度数 ()



- A. 小于 90° B. 等于 90°
C. 大于 90° D. 不能确定

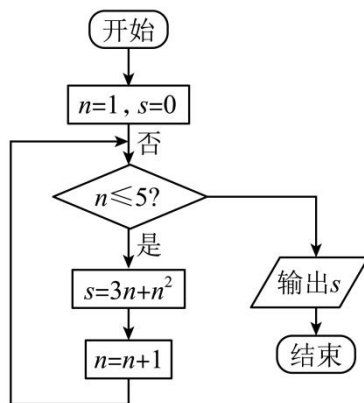
10. 设 $a > 0$, $b > 0$, 若 $a + 2b = 5$, 则 $\frac{(a+1)(2b+1)}{\sqrt{ab}}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

二. 填空题 (每题 5 分, 共 50 分)

11. 设函数 $f(x) = x^2$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$ _____。

12. 已知流程图如图所示, 该程序运行后, 则输出的 s 值为_____。



13. 班主任为了掌握每个星期语文、英语、数学、物理、化学各科学习状况, 安排从星期一到星期五早修时间都要排一科小考, 但是语文不排星期一, 英语不排星期二, 数学不排星期三。则总共有_____种不同的考试排法。

14. 已知函数 $f(x) = \sin x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$, 给出以下四个命题:

- ① $f(x)$ 的最小正周期为 π ;
② $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
③ $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{11\pi}{8}, 0\right)$ 中心对称;



④ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称.

其中正确命题的个数是_____个。

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x$, 过椭圆上一点 P 作 l_1 、

l_2 的平行线, 分别交 l_1 、 l_2 于 M 、 N 两点。若 $|MN|$ 为定值, 则 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值是_____。

16. 已知向量 $\vec{a} = (\lambda, 9)$, $\vec{b} = (1, \lambda)$ 共线且方向相同, 则 λ 的值等于_____。

17. 小旭和宪宪均从同一本书的第 1 页开始, 逐页依顺序在每一页上写一个数。小旭在第 1 页写 1, 且之后每一页写的数均为他在前一页写的数乘 2; 宪宪在第 1 页写 1, 且之后每一页写的数均为他在前一页写的数加 12。若小旭在某页写的数为 1024, 则宪宪在该页写的数为_____。

18. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{12}{3\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴非负半轴建立平面直角坐标系, 则曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{3}y \end{cases}$ 后, 得到的曲线是_____。

19. 全班数学月考第一次成绩的平均分数是 60 分, 标准差为 12 分, 第二次成绩平均分数是 69 分, 标准差为 10 分, 两次成绩的相关系数是 0.6, 小明第一次成绩是 70 分, 请问小明第二次成绩预测是_____分。

20. 已知函数 $f(x) = -x|x-a|$, 若对任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (-1, 0)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = -4$, 则实数 a 的最大值为_____。